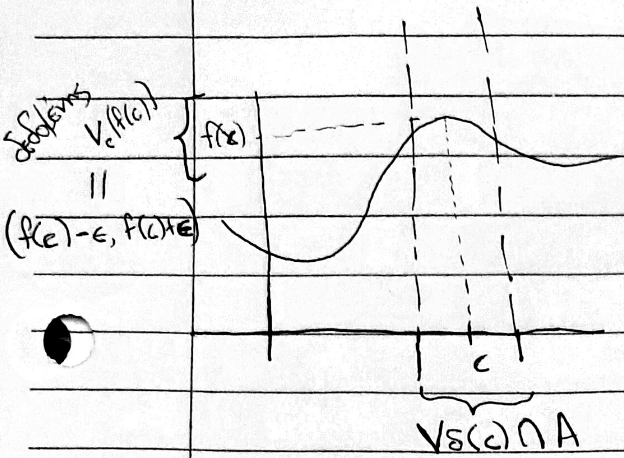
Συνεχής συνάρτηση

Ορισμός: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $c \in A$. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο c. Εάν $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ τ.ω. $x \in A$ με $|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$

Εάν η f δεν είναι συνεχής στο c, λέμε ότι είναι ασυνεχής



$f(V_\delta(c) \cap A) \subset V_\epsilon(f(c))$

Θεώρημα: Η $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $c \in A$ αν και μόνο αν δεδομένης γειτονιάς $V_\epsilon(f(c)) = (f(c)) = (f(c)-\epsilon, f(c)+\epsilon)$ του $f(c)$, $\exists$ γειτονιά $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ του c τ.ω. $f(V_\delta(c) \cap A) \subset V_\epsilon(f(c))$

Σχόλιο: Εάν $c \in A$ είναι σ.σ. του A, τότε η f είναι συνεχής $\Leftrightarrow$ $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$

Εάν το c δεν είναι σ.σ. τότε το A λέγεται απομονωμένο

- Άρα εάν c είναι σ.σ. του A, για να είναι συνεχής η f στο c πρέπει

(i) Η f να ορίζεται στο c (ώστε το $f(c)$ να έχει νόημα)

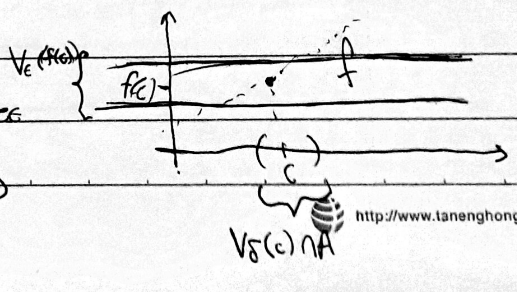
(ii) Το όριο της f στο c να υπάρχει (στο $\mathbb{R}$) (ώστε $\lim_{x \to c} f(x)$ να έχει νόημα)

(iii) $\lim_{x \to c} f = f(c)$

Εάν το c δεν είναι σ.σ. του A τότε

$\exists \delta$-γειτονιά $V_\delta(c)$ του c ώστε $A \cap V_\delta(c) = \{c\}$

Η f είναι συνεχής στο c



No. Date

$\forall \varepsilon > 0$ Πρέπει να $\exists$ $\delta > 0$ τ.ω.
$f(V_\delta(c) \cap A) \subseteq V_\varepsilon(f(c))$

Ακολουθιακό κριτήριο για συνέχεια
$f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $c \in A$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_n \in A$ τ.ω. $x_n \to c$, έχουμε $f(x_n) \to f(c)$

Κριτήριο ασυνέχειας: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $c \in A$. Η f είναι ασυνεχής στο c αν και μόνο αν $\exists$ ακολουθία $x_n \in A$ τ.ω. $x_n \to c$ αλλά $f(x_n) \not\to f(c)$

Παραδείγματα

(a) Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = b$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
Όντως, εάν $c \in \mathbb{R}$ (τυχαίο), τότε $\lim_{x \to c} f(x) = b = f(c)$
(c σ.σ. του $A = \mathbb{R}$)

(b) $g(x) = x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Όντως, έστω $c \in \mathbb{R}$ τυχαίο
Θ.δ.ο. η g είναι συνεχής στο c.
Έχω $\lim_{x \to c} g = \lim_{x \to c} x = c = g(c)$

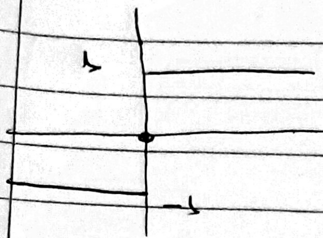
Άσκηση: $h(x) = x^2$ ν.δ.ο. είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

(c) $\phi(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $A = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

Όντως, έστω $c \in A$. Τότε, $\lim_{x \to c} \phi(x) = \lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c} = \phi(c)$

(d) $\phi(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ δεν είναι συνεχής στο c
Όντως η ϕ δεν ορίζεται στο $c = 0$.
Παρατηρώ $\lim_{x \to 0} \phi(x)$ δεν υπάρχει.

ⓔ Η $sgn(x)=\begin{cases} 1 & , x>0 \\ 0 & , x=0 \\ -1 & , x<0 \end{cases}$ Δεν είναι συνεχής στο $x=0$



Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to 0} sgn(x) \nexists$ (στο $\mathbb{R}$)

Άρα η sgn είναι ασυνεχής στο $x=0$ (παρόλο που ορίζεται εκεί)

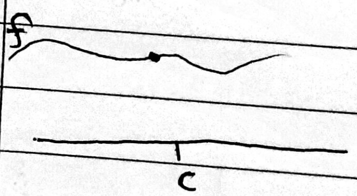
ⓕ $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{εαν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{εαν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$ $A=\mathbb{R}$

Η f λέγεται συνάρτηση του Dirichlet (1829)
Η f δεν είναι συνεχής πουθενά

Όντως εαν c είναι ρητός, ∃ ακολουθία x_n αρρήτων με $x_n \to c$
Αφού $f(x_n)=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$, έχω $f(x_n)\to 0$. Όμως $f(c)=1$, άρα η f ασυνεχής στο c.

Παρατήρηση: Εαν η $f: A\to\mathbb{R}$ δεν είναι συνεχής σε κάποιο σημείο c λόγω του ότι δεν ορίζεται εκεί, αλλά $\lim_{x\to c} f = L\in\mathbb{R}$
Ορίζουμε $F: A\cup\{c\}\to\mathbb{R}$ ως $F(x)=\begin{cases} L & , x=c \\ f(x) & , x\in A \end{cases}$

Τότε η F είναι συνεχής στο $A\cup\{c\}$



$A=\mathbb{R}\setminus\{c\}$

$F(c)=\lim_{x\to c} f(x)$ Συνεχής Επέκταση

$\lim_{x\to c} F = \lim_{x\to c} f = L = F(c)$

Παραδείγματα

(a) $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ $x \neq 0$. Αφού η f δεν ορίζεται στο $x=0$, δεν μπορεί να είναι συνεχής στο $x=0$. Όμως ξέρουμε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Άρα η

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x=0 \\ x\sin\frac{1}{x} & \text{αν } x\neq 0 \end{cases}$$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

(b) Εαν $g: A \to \mathbb{R}$ δεν έχει όριο στο c, τότε δεν μπορούμε να βρούμε συνάρτηση $G: A\cup\{c\} \to \mathbb{R}$ που να είναι συνεχής ορίζοντας

$$G(x) = \begin{cases} k & \text{αν } x=c \\ g(x) & \text{αν } x\in A \end{cases}$$

(Εαν $\lim_{x\to c} G$ υπήρχε $\Rightarrow \lim_{x\to c} g$ υπάρχει. άτοπο)

(c) $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ $x\neq 0$ δεν έχει όριο στο $x=0$. Άρα δεν υπάρχει $k\in\mathbb{R}$ τ.ω. η

$$G(x) = \begin{cases} k, & x=0 \\ \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \end{cases}$$ να ήταν συνεχής στο $x=0$

Άσκηση: Έστω $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και $f(r)=0$ $\forall\, r$ άρρητος
Τότε $f(x)=0$ $\forall\, x\in\mathbb{R}$

Λύση

Αρκεί ν.δ.ο. εαν $q = \mathbb{Q}$ Τότε $f(q)=0$

$\exists\, x_n \to q$ με x_n άρρητος. Αφού f συνεχής στο q, έχουμε $f(x_n)\to f(q)$

Όμως $f(x_n)=0$ διότι x_n άρρητος. Άρα, $f(q)=0$

Ισχύει Απο το ακολουθιακό κριτήριο συνέχειας.

Άσκηση: Έστω $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τ.ω. $\exists$ $k>0$ με $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$

Τότε η f είναι συνεχής σε κάθε $c\in\mathbb{R}$

No. Date

1ος Τρόπος (Με ακολουθιακό κριτήριο)

Έστω $x_n \in \mathbb{R}$ με $x_n \to c$ (τυχαία κατά τα άλλα ακολουθία)

Θ.δ.ο. $f(x_n) \to f(c)$

$|f(x_n) - f(c)| \leq k|x_n - c|$ Άρα $f(x_n) \to f(c)$

2ος Τρόπος (ϵ-δ ορισμός)

Έστω $\epsilon > 0$. Επιλέγω $\delta = \frac{\epsilon}{k}$. Τότε εάν $|x-c| < \delta$ έχουμε

$|f(x) - f(c)| \leq k|x-c| < k\delta = k\frac{\epsilon}{k} = \epsilon$

Άρα η f είναι συνεχής στο c

* Γενικά το δ εξαρτάται από το ϵ. Δεν εξαρτάται από το c.

Ερώτηση: Έστω $f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x - 2}$, $x \neq 2$

Μπορούμε να ορίσουμε την f κατάλληλα στο $x=2$ ώστε να πάρουμε συνεχή συνάρτηση; (στο $\mathbb{R}$)

$\lim_{x \to 2} f(x)$ δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$

Διότι $\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+x-5}{x-2} = -\infty$, $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+x-5}{x-2} = +\infty$.

Εφαρμογή: Ν.δ.ο. $f(x) = \sin x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Θ.δ.ο. $|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\sin x - \sin y = 2\sin\left[\frac{x-y}{2}\right]\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|$

$$\leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right|$$

Άσκηση Για Σπίτι

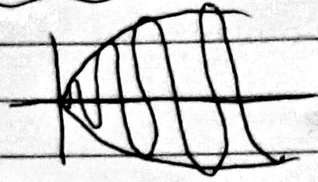
(i) Ν.δ.ο. $\cos x$ είναι συνεχής

(ii) Ερώτηση: Η $g(x) = \frac{1}{x}$ $x \neq 0$.

Μπορώ να την ορίσω κατάλληλα στο $x=0$ ώστε να πάρουμε συνεχή συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{R}$;

Σχόλια για προηγούμενες ασκήσεις

$\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$ γραφική:



$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x^2}$$

$$x_n = \left(\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)^{-1/2}$$

$$f(x_n) = \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$$

$\lim f(x_n)$ δεν υπάρχει